Leçon 150 - Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

Cadre : E est un K-ev de dimension finie $n \geq 1$. On a $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ lorsque l'on parle de topologie.

1. Action par translation - Pivot de Gauss. —

- Def : $Gl_n(K)$ agit par translation à gauche sur $M_{n,m}(K)$ avec : $A.M := AM$.
- Pro : L'orbite de M par l'action de translation à gauche est caractérisée par $Ker(M)$.
- Def : Matrice échelonnée en lignes, en colonnes.
- Def : Pivot de Gauss à gauche.
- Rem : Utilisation du Pivot de Gauss pour résoudre des systèmes linéaires.
- Pro : Pour l'action par translation à gauche, on peut ramener une matrice à une matrice échelonnée en lignes.
- Def : $Gl_m(K)$ agit par translation à droite sur $M_{n,m}(K)$ avec : $A.M := MA^{-1}$
- Pro : L'orbite de M par l'action de translation à droite est caractérisée par $Im(M)$.
- Rem : On obtient de même une méthode de Pivot de Gauss à droite.
- Pro : Pour l'action par translation à droite, on peut ramener une matrice à une matrice échelonnée en colonnes.
- App : Les transvections engendrent $Sl_n(K)$. Les transvections et dilatations engendrent $Gl_n(K)$.

2. Action de Steinitz - Matrices équivalentes. —

1. *Orbites et rang.* —

- Def : $Gl_n(K) \times Gl_m(K)$ agit par équivalence sur $M_{n,m}(K)$ avec : $(A, B).M := AMB^{-1}$.
- Def+Pro : Deux matrices M,M' dans la même orbite pour cette action sont dites équivalentes.
  M et M' sont équivalentes ssi elles représentent la même application linéaire dans deux paires de bases différentes.
- Pro : Toute matrice $M \in M_{n,m}(K)$ est équivalente à une matrice J_r, pour un $0 \leq r \leq min(m, n)$. Les orbites de l'action de Seinitz sont caractérisées par le rang, et un système de représentants est $\{J_r, 0 \leq r \leq min(m, n)\}$.
- App : $rg(A) = rg(A^t)$.
- App : Soit k un sous-corps de K. Deux matrices de $M_{n,m}(k)$ équivalentes dans $M_{n,m}(K)$ le sont dans $M_{n,m}(K)$.
- Pro : Nombre de matrices de rang r dans $M_{n,m}(\mathbb{F}_q)$ pour $q = p^l$.

2. *Topologie des orbites (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).* —

- Pro : L'adhérence de l'ensemble des matrices de rang r de $M_{n,m}(K)$ est l'ensemble des matrices de rang $\leq r$.
- Rem : $Gl_n(K)$ est dense dans $M_n(K)$.
- Pro : $Gl_n(K)$ est l'unique orbite ouverte de $M_n(K)$ pour l'action par équivalence.
- Cor : Le rang n'est pas une application continue sur $M_{n,m}(K)$.
- Pro : Pour tout $0 \leq r \leq min(n, m)$, l'ensemble des matrices de rang r de $m_{n,m}(K)$ est connexe.

3. Action par conjugaison - Matrices semblables. —

1. *Généralités.* —

- Def : On fait agir $Gl_n(K)$ par conjugaison sur $M_n(K)$ avec : $P.M = PMP^{-1}$. Deux matrices M,M' sont semblables s'il existe P tq $M' = P.M$.
- Pro : La conjugaison d'une matrice revient à faire un changement de base pour un emdomorphisme de K^n.
- Def : M est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.
  M est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.
- Pro : Deux matrices semblables ont même rang, même det, même polynôme caractéristique, même polynôme minimal.
- Thm : Une matrice est diagonalisable sur K ssi son polynôme minimal est scindé à racines simples sur K.
  Une matrice est trigonalisable sur K ssi son polynôme minimal est scindé sur K ssi son poly caractéristique est scindé sur K.
- Rem : Ainsi, sur un corps algébriquement clos, toute matrice est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

2. *Classification des orbites.* —

- Pro : Les classes de similitude de matrices diagonalisables sont caractérisées par le polynôme caractéristique et le polynôme minimal d'un représentant.
- Contre-ex : $Diag(1, 2, 2)$ et $Diag(1, 1, 2)$ sont diagonales, ont même polynôme minimal mais ne sont pas semblables.
- Def : Le bloc de Jordan de taille $r \geq 1$ associé à $\lambda \in K$, et noté $J_r(\lambda)$, est la matrice de $M_r(K)$ avec λ sur la diagonale, et des 1 juste au-dessus de la diagonale.
- Théorème de réduction de Jordan des endomorphismes trigonalisables : Soit $f \in End(E)$ trigonalisables. Soient λ_i les valeurs propres de f. Alors il existe une base B de E dans laquelle $Mat(f, B)$ est une matrice diagonale de blocs de Jordan $J_{r_{i,j}}(\lambda_i)$.
- Pro : Les classes de similitude de matrices trigonalisables sont caractérisées par les blocs de Jordan.
- Contre-ex : $Diag(J_2(0), 0, 0)$ et $Diag(J_2(0), J_2(0))$ sont triangulaires supérieures, ont même polynôme minimal, même polynôme caractéristique, mais ne sont pas semblables.
- Rem : Une matrice est nilpotente ssi elle est trigonalisable et si toutes ses valeurs propres sont nulles.
- App : Le nombre de classes d'équivalence de matrices nilpotentes de $M_n(K)$ est égal au nombre de partitions de l'entier n.
- App : Sur un corps algébriquement clos, M est semblable à λM pour un $\lambda \in K$ ssi M est nilpotente.

- **Dev** : Soit $n \geq 1$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$. On a les propriétés suivantes :
  i) La matrice A est nilpotente ssi 0 appartient à l'adhérence de la classe de similitude de A.
  ii) La matrice A est diagonalisable ssi la classe de similitude de A est fermée.
- Pro : Si K est infini, M et M^t sont semblables.
- Def : Invariants de similitude.
- Def : Matrice compagnon.
- Thm : Réduction de Frobenius.
- Ex : Classes de similitude en dimension 2,3.
- **Dev** : Théorème de Brauer : Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique quelconque, $n \geq 1$, et $\sigma, \sigma' \in \Sigma_n$.
  Alors σ et σ' sont conjuguées si et seulement si leurs matrices de permutation $T_\sigma, T_{\sigma'}$ sont semblables dans $Gl_n(\mathbb{K})$.

3. *Actions de $O_n(\mathbb{R})$ et de $U_n(\mathbb{C})$.* —

- Def : On fait agir le sous-groupe $O_n(\mathbb{R})$ par conjugaison sur $M_n(\mathbb{R})$.
- Rem : L'action par conjugaison de $O_n(\mathbb{R})$ est équivalent à un changement de bon sur R^n.
- Def : $f \in End(E)$ est dit normal ssi $f \circ f^* = f^* \circ f$. Sur un espace euclidien, la version matricielle correspondante est $MM^t = M^tM$.
- Théorème de réduction des endomorphismes normaux : Soit f un endomorphisme normal. Il existe une base orthonormée B de E dans laquelle on a :
  $Mat(f,B) = Diag(\lambda_1, .., \lambda_r, P_1, .., P_s)$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $P_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}$, $a_j, b_j \in \mathbb{R}$.
- App : Pour $M \in A_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tq $PMP^{-1} = Diag(0, .., 0, P_1, .., P_s)$ avec $P_j = \begin{pmatrix} 0 & -b_j \\ b_j & 0 \end{pmatrix}$, $b_j \in \mathbb{R}$.
  Si $M \in S_n(\mathbb{R})$, on a alors $s = 0$.
  Si $M \in O_n(\mathbb{R})$, alors $|\lambda_i| = 1$ et $a_j^2 + b_j^2 = 1$.
- App : $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.
- App : On peut définir la racine carrée d'une matrice symétrique définie positive.
- Rem : Sur un espace hermitien, un endomorphisme normal revient à avoir une matrice M telle que $M\overline{M}^t = \overline{M}^tM$.
  On obtient alors un résultat de réduction par similitude similaire, mais avec $U_n(\mathbb{C})$ à la place de $O_n(\mathbb{R})$, et $Diag(a_j + ib_j, a_j - ib_j)$ à la place de $\begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}$

4. Action par congruence - Matrice congruentes. —

- Def : On fait agir $Gl_n(K)$ par congruence sur $M_n(K)$ par : $P.M = PMP^t$.
  Deux matrices M et M' dans la même orbite sont dites congruentes.
- Rem : Faire agir P sur M par congruence revient à faire un changement de base pour la forme bilinéaire $(X,Y) \mapsto X^tMY$ associée à M.
- Rem : Pour q une forme quadratique sur E, un changement de base $B \to B'$ revient à faire agir la matrice de passage $P_{B \to B'}$ par congruence à $Mat(b,B)$, où b est la forme bilinéaire symétrique associée à q.
- Def : Deux formes quadratiques sont dites équivalentes ssi leurs formes polaires sont congruentes.
  On définit le rang de q par $rg(q) := rg(b)$.
- Thm : Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $rg(q) = r$, alors q est équivalente à $x \mapsto x_1^2 + .. + x_r^2$.
- Théorème d'inertie de Sylvester : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et q est de rang r, alors on a un $0 \leq p \leq r$ tel que q soit équivalente à $x \mapsto x_1^2 + .. + x_p^2 - (x_{p+1}^2 + .. + x_r^2)$.
  On dit alors que q est de signature $(p, r-p)$ et ce couple ne dépend que de q.
- App : Une forme quadratique réelle est définie ssi $r = q$. Elle est positive ssi $p = r$ et négative ssi $p = 0$.
- Ex : Pour $n = 2$ et $q((x,y)) = ax^2 + bxy + cy^2$ avec $a > 0$, on a $det(A) \equiv b^2 - 4ac$ et le signe de $b^2 - 4ac$ détermine la signature de q.
- App : Il y a n+1 classes d'équivalences de formes quadratiques non-dégénérées sur $\mathbb{R}^n$.
- Rem : Dans l'étude du groupe orthogonal, on peut s'intéresser à $O(sign(q))$ plutôt que $O(q)$ car ces groupes sont conjugués.
- Thm : Si $K = \mathbb{F}_l$ et $rg(q) = r$, alors q est équivalente à $x \mapsto x_1^2 + .. + x_r^2$ ou à $x \mapsto \varepsilon.x_1^2 + x_2^2 + .. + x_r^2$, avec ε un non-carré de $\mathbb{F}_l$.
- **Dev** : Loi de réciprocité quadratique : Soient p,m des nombres premiers impairs distincts.
  Alors $(\frac{p}{m}) = (\frac{m}{p}).(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{m-1}{2}}$, où $(\frac{x}{p}) = \begin{cases} 1 \text{ si x est un carré mod(p)} \\ 0 \text{ si } x = 0 \text{ mod(p)} \\ -1 \text{ sinon} \end{cases}$

Références

Caldero, Germoni : Action par translation à gauche, caractérisée par le noyau,dilatation, transvection,permutation,conséquences sur les lignes/colonnes, définition du pivot, matrice échelonnée en lignes, un exemple, décomposition en orbites (par la méthode du pivot de Gauss), action par translation à droite, orbites caractérisées par l'image, matrices échelonnées par colonnes, les transvections engendrent $Sl_n(K)$. Action par équivalence, deux mat équivalentes représentent le même morphisme, orbites caractérisées par le rang, les J_r représentent les orbites, nombre de matrices de rang r de $M_{n,m}(\mathbb{F}_q)$. Adhérence des orbites, $Gl_n(K)$ dense et seule orbite ouverte, rang pas continu, les orbites sont connexes. Action par congruence, matrices congruentes, lien avec les formes quadra, classification des formes quadra, Th de Sylvester, Loi de réciprocité quadratique.(Dev)

Gourdon : Action par conjugaison, matrices semblables, revient à un chgt de base d'endomorphisme, invariance de χ_M et μ_M, trigonalisable, diagonalisable, caractérisations. Bloc de Jordan, Réduction de Jordan, cas algébriquement clos, éléments caractérisant les orbites diagonalisables, contre-exemples non-semblables, nombre d'orbites nilpotentes, invariants de similitude, matrice compagnon, réduction de Frobenius, ex en dim 2,3. Action de $O_n(\mathbb{R})$ par conjugaison, endomorphismes normaux, réduction, cas

$A_n(\mathbb{R})$,$S_n(\mathbb{R})$,$O_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R})$ connexe, racine carrée dans $S_n^{++}(\mathbb{R})$, exp homéo, résultats similaires avec $H_n(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}$.
Objectif Agrégation : $rg(A) = rg(A^T)$, si A equiv à A' sur L, alors c'est vrai sur K.
FGN (Algèbre 1) : Topologie des classes de similitude.(Dev)
Sans Ref : Théorème de Brauer.(Dev)

January 23, 2018

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes